MATEMÁTICA III

PROGRESSÕES

(1) Qual o significado de $a_n = 3n^2 + 2$, $n \in \mathbb{N}^*$? R. Se tomarmos um número inteiro positivo e diferente de zero e substituirmos na expressão encontraremos o enésimo termo da sequência.

(2) Como é chamada a expressão do tipo: $a_n = 3n^2 + 2$? R. Termo geral.

(3) Toda sequência tem que ser Progressão Aritmética ou Progressão geométrica? R. Não, a maioria das sequências não significam nada.

(4) Como se caracteriza uma PA? R. Cada termo a partir do 2° é o termo anterior somado a um valor constante ex: PA (3, 5, 7, 9, 11 ---), cada termo a partir do segundo é igual ao termo anterior acrescido de 2.

(5) Como se caracteriza uma PG?

R. Cada termo a partir do 2º é o termo anterior multiplicado por um valor constante.
ex: PG (3, 6, 12, 24, 48...). Cada termo a partir do segundo é igual ao termo anterior multiplicado por 2.

(6) Como são chamados os termos constantes da PA ou da PG?

R. Razão r da PA e razão q da PG.

(7) Quais os elementos de interesse de uma PA? R. O primeiro termo: a_1; a razão r; o termo geral a_n e a soma dos n termos S_n.

(8) Quais os elementos de interesse de uma PG? R. O primeiro termo a_1, a razão q, o termo geral a_n e a soma dos n termos S_n.

(9) Determine os 6 primeiros termos da sequência $a_n = 1 + 2.n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

R. Tomamos os 6 primeiros números naturais $n(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ e substituímos na expressão; $a_1 = 1 + 2.1$, $a_1 = 3$

$a_2 = 1 + 2.2$, $a_2 = 5$; $a_3 = 1 + 2.3$, $a_3 = 7$,

$a_4 = 1 + 2.4$, $a_2 = 9$; $a_5 = 1 + 2.5 = 11$

$a_6 = 1 + 2.6$; $a_6 = 13$; $(3, 5, 7, 9, 11, 13)$.

(10) O que devemos fazer para saber se a sequência é uma PA ou uma PG? R. Para saber se é uma PA subtraímos o 1º termo do 2º, o 2º do 3º e assim por diante, se a diferença for constante é PA. $5-3 = 2$; $7-5 = 2$; $9-7 = 2$; $11-9 = 2$ $13-11 = 2$, é uma PA de razão 2. Para saber se é PG dividimos o 2º pelo 1º, o 3º pelo 2º e assim

por diante, se o quociente for constante é PG.

$\frac{5}{3} \neq \frac{7}{5}$ não é PG.

(11) Escreva os 5 primeiros termos da sequência $a_n = 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

R. $a_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ $n(1,2,3,4,5)$.

$a_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$a_3 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$; $a_4 = 2^4 - 1 = 15$

$a_5 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ $(1, 3, 7, 15, 31)$.

(12) Verifique se a sequência é PA ou PG. R. $3 - 1 = 2$; $7 - 3 = 4$; $2 \neq 4$ não é PA; $\frac{3}{1} \neq \frac{7}{3}$ não é PG.

(13) Verifique se os números: -11, 30, e 65 pertencem à sequência $a_n = -35 + 4n$, $n \in \mathbb{N}^*$. R. $-11 = -35 + 4n$

$-35 + 4n = -11$, $4n = -11 + 35$, $4n = 24$

$4n = 24$, $n = \frac{24}{4}$, $n = 6$

n é natural, logo, −11 é o 6º termo da sequência.

$30 = -35 + 4n$, $4n = 30 + 35$, $4n = 65$

$n = \frac{65}{4}$, $n = 16{,}25$ não é nº natural, logo, 30 não é termo da sequência.

$65 = -35 + 4n$, $4n = 100$, $n = \frac{100}{4}$

$n = 25$, logo, 65 é o 25º termo da sequência.

(14) (UE-CE) Calcule o 6º termo da sucessão em que $a_{n+1} = 1 + 2 \cdot a_n$ e $n = (1, 2, 3 \ldots)$, se $a_1 = 0$. R.

$a_1 = 0$

$a_{1+1} = 1 + 2 \cdot 0 = 1$

$a_{2+1} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$a_{3+1} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$

$a_{4+1} = 1 + 2 \cdot 7 = 15$

$a_{5+1} = 1 + 2 \cdot 15 = 31$

$a_6 = 31$

(15) (PUC-SP) Calcule a_3 na sequência $a_{n+1} = \frac{2 + a_n^2}{2 \cdot a_n}$ em que $a_1 = 1$

R. $a_1 = 1$

$a_1 + 1 = \frac{2 + 1}{2 \cdot 1}$; $a_2 = \frac{3}{2}$

$a_2 + 1 = \frac{2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{3}{2}}$; $a_3 = \frac{2 + \frac{9}{4}}{3}$

$= \frac{\frac{8 + 9}{4}}{3} = \frac{\frac{17}{4}}{\frac{3}{1}} = \frac{17}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{12}$

(16) (UE-CE) Calcule o produto dos 6 primeiros termos da sequência

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ a_{n-1}, \text{ se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

R. $a_1 = \frac{1 + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ $\quad a_4 = a_{4-1} = a_3 = 2$

$a_2 = a_{2-1} = a_1 = 1$ $\quad a_5 = \frac{5+1}{2} = 3$

$a_3 = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $\quad a_6 = a_{6-1} = a_5 = 3$

produto $= 1.1.2.2.3.3 = 36$

(17) Determine o 15° termo da sequência (1, 4, 7...). R. Como não diz se é PA ou PG, temos que fazer o teste. $4-1=3$; $7-4=3$, é uma PA de razão 3.

$a_n = a_1 + (n-1).r$, $a_{15} = 1 + (15-1).3$

$a_{15} = 1 + 42 = 43$. ⌐

(18) O 8° termo de uma PA é 15 e o 1° termo é 1. Calcule a razão.

R. $a_n = a_1 + (n-1).r$, $15 = 1 + (8-1).r$,

$15 = 1 + 7r$, $7r + 1 = 15$, $7r = 15 - 1$,

$7r = 14$, $r = \frac{14}{7}$, $r = 2$.

(19) Ache o termo geral e o vigésimo termo da PA (5, 8, 11...). R.

$a_n = a_1 + (n-1)r$, $a_n = 5 + (n-1).3$

$a_n = 5 + 3n - 3$, $a_n = 3n + 2$

$a_{20} = 3.20 + 2 = 62$ ⌐

(20) Se na PA $a_1 + a_5 = 15$ e $a_3 + a_6 = 36$, calcule a_1 e r.

R. Sempre que a PA for dada em função da soma dos termos temos que escrevê-la em função de a_1 e r.

$$a_1 + a_1 + 4r = 15$$
$$a_1 + 2r + a_1 + 5r = 36$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 4r = 15 \\ 2a_1 + 7r = 36 \ (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 4r = 15 \\ -2a_1 - 7r = -36 \end{cases}$$

$$-3r = -21 \ (-1)$$

$$3r = 21$$

$$r = \frac{21}{3}$$

$$r = 7$$

$$2a_1 + 4 \cdot 7 = 15, \quad 2a_1 = 15 - 28$$

$$2a_1 = -13, \quad a_1 = \frac{-13}{2}$$

(21) Calcule m de modo que a sequência $(2m, 3m+1, m^2+2)$ seja uma PA.

R. $3m + 1 - (2m) = m^2 + 2 - (3m + 1)$

$3m + 1 - 2m = m^2 + 2 - 3m - 1$

$m+1 = m^2 - 3m + 1$

$m^2 - 3m - m = 0$, $m^2 - 4m = 0$

$m(m-4) = 0$, $m = 0$, $m - 4 = 0$

$m = 4$

formação das PAs.

$(2.0, 3.0+1, 0^2+2) = (0, 1, 2)$ —

$(2.4, 3.4+1, 4^2+2) = (8, 13, 18)$ —

(22) Quantos termos tem a PA (17, 26, 35 ... 197)?

a_1 a_n

R. $r = 26 - 17 = 9$

$a_n = a_1 + (n-1).r$, $197 = 17 + (n-1).9$

$197 = 17 + 9n - 9$, $8 + 9n = 197$, $9n = 197 - 8$

$9n = 189$, $n = \frac{189}{9} = 21$ ✓

(23) Interpole 10 meios aritméticos entre 5 e 49. R. Vamos considerar que esta PA tem 12 termos: o primeiro, o último e os 10 que serão inseridos entre o primeiro e o último.

$a_n = a_1 + (n-1).r$; $49 = 5 + (12-1).r$

$49 = 5 + 11r$, $11r + 5 = 49$, $11r = 49 - 5$

$11r = 44$, $r = \frac{44}{11}$, $r = 4$

PA (5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49)

(24) Quantos são os múltiplos de 3 existentes entre 31 e 200? R.

Primeiro vamos ver quem é a_1 e quem é a_n: a_1 é o 1º número maior que 31 e divisível por 3; é o nº 33. a_n é o último múltiplo de 3 menor que 200, que é 198.

$a_n = a_1 + (n-1)r$, $198 = 33 + (n-1).3$

$198 = 33 + 3n - 3$, $198 = 3n + 30$

$3n + 30 = 198$, $3n = 168$, $n = \frac{168}{3} = 56$

(25) Quantos números entre 50 e 250 incluídos não são múltiplos de 3?

R. Resolvemos do mesmo modo que no problema anterior e subtraímos

os múltiplos de 3 do total de números: $a_1 = 51$, $a_n = 249$

$a_n = a_1 + (n-1)r$, $249 = 51 + (n-1).3$

$249 = 51 + 3n - 3$, $3n = 249 - 48$, $3n = 201$

$n = \frac{201}{3}$, $n = 67$

· total de números $\underset{50}{\bullet} - - - - - - - - \underset{250}{\bullet}$

$= 250 - 50 + 1 = 201$ total de não divisores de 3: $201 - 67 = 134$

(26) (UF-RS) Numa PA crescente $a_{20} = 185$, $a_{10} = 95$, calcule o 1º termo.

R: $\begin{cases} a_1 + 9r = 95 \quad (-1) \\ a_1 + 19r = 185 \end{cases}$, $\begin{cases} -\cancel{a_1} + 9r = -95 \\ \cancel{a_1} + 19r = 185 \end{cases}$

$\cancel{10}r = 9\cancel{0}$

$r = 9$ $a_n = a_1 + (n-1).r$, $95 = a_1 + (10-1).9$

$95 = a_1 + 81$, $a_1 = 95 - 81$, $a_1 = 14$

(27) (FUVEST - SP) Em uma progressão aritmética de 3 termos positivos os 3 primeiros são $(1-a, -a, \sqrt{11-a})$ calcule o 4º termo.

R. $-a-(1-a) = \sqrt{11-a} + a$,

$-a-1+a = \sqrt{11-a} + a$, $\sqrt{11-a} = -a-1$

$\sqrt{11-a}^2 = (-a-1)^2$, $11-a = a^2+2a+1$

$a^2+3a-10=0$, $a=1$, $b=3$, $c=-10$.

$\Delta = 9-4.1.(-10) = 49$, $a' = \frac{-3+7}{2}$, $a' = 2$

$a'' = \frac{-3-7}{2} = -5$

PA (6, 5, 4), o quarto termo é 3.

(28) (UECE) Seja $(a_1, a_2 \dots a_{10})$ uma PA. Se $\frac{a_4}{a_7} = \frac{2}{5}$ e $a_4 + a_7 = 42$. Calcule $a_3 . a_5$.

R. $5a_4 = 2a_7$, $a_4 = \frac{2a_7}{5}$, $\frac{2a_7}{5} + \frac{a_7}{1} = \frac{42}{1}$

$\frac{2a_7 + 5a_7 = 210}{5}$, $7a_7 = 210$, $a_7 = 30$

$a_4 + 30 = 42$, $a_4 = 12$, $\begin{cases} a_1 + 6r = 30 \\ a_1 + 3r = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + 6r = 30 \\ -a_1 - 3r = -12 \end{cases}$

$3r = 18$, $r = 6$

$a_1 + 3.6 = 12$, $a_1 = 12-18$, $a_1 = -6$

$a_3 = -6 + 12$, $a_3 = 6$; $a_5 = -6 + 4.6$, $a_5 = 18$

$a_3 . a_5 = 6.18 = 108$

29) (UNIFOR-CE) Em uma PA tem-se $a_6 = 26$ e $a_8 = 38$. A soma dos dez primeiros termos dessa progressão é:

R. $\begin{cases} a_1 + 5r = 26 \\ a_1 + 7r = 38 \end{cases}$ (-1) $\begin{cases} -a_1 - 5r = -26 \\ a_1 + 7r = 38 \end{cases}$

$2r = 12$

$r = 6$ $\quad a_1 + 7.6 = 38$,

$a_1 = 38 - 42$, $\quad a_1 = -4$ → (-4, 2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50)

$a_{10} = -4 + 9.6$, $\quad a_{10} = -4 + 54 = +50$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$, $\quad S_{10} = \frac{(-4+50).10}{2}$

$S_{10} = \frac{46.10}{2} = 230$ c

30) (VUNESP-SP) Um estacionamento cobra R$ 4,00 pela 1ª hora, R$ 3,00 pela 2ª e a partir da 2ª hora de um desconto de modo que os preços caiam em PA. Se a 12ª hora custa R$ 0,8 quanto deverá pagar um cliente que ficar com o seu carro estacionado por 5 horas?

R. a 1ª hora não faz parte da progressão: $(3{,}00 \_\_\_\_\_ 0{,}80)$
$a_1 \qquad\qquad a_{11}$

$a_n = a_1 + (n-1).r$; $0{,}80 = 3{,}00 + 10.r$

$10r = 0{,}80 - 3{,}00$, $10r = -2{,}20$, $r = -0{,}22$

a 5ª hora será a_4 $(3{,}00; 2{,}78; 2{,}56; 2{,}34)$.

na soma vamos incluir a 1ª hora

R$ 14,68.

(31) (FABRAI-MG) Calcule a soma: $1+2+3+\ldots+1000$.

R. vamos calcular n: $a_1 = 1$, $a_n = 1000$

$a_n = a_1 + (n-1).r$, $1000 = 1 + (n-1).1$

$n - 1 + 1 = 1000$; $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n).n}{2}$

$S_{1000} = \dfrac{(1+1000).1000}{2} = 1001.500 = 500.500.$ ✓

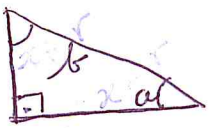
(32) (UF-SE) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = 3n^2 + 2n$, calcule o 10° termo dessa PA. R.

a soma dos 10 primeiros termos menos a soma dos 9 primeiros termos é igual ao 10° termo.

$a_{10} = S_{10} - S_9.$

$= 3.10^2 + 2.10 - (3.9^2 + 2.9) = 320 - 261 = (59)$ (15)

(33) (UNIFOR-CE) As medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo formam uma PA. Calcule o menor dos ângulos. R.



$(a, b, 90)$; $a + b + 90 = 180$

$$\begin{cases} a + b = 90 \\ -a + 2b = 90 \end{cases}$$

$3b = 180$ $\quad b = \frac{180}{3} = 60°$

$b - a = 90 - b$

$2b - a = 90$

$2.60 - a = 90$, $\quad a = 120 - 90$, $\quad a = 30°$ $\quad (30, 60, 90)$

(34) (PUC-RS) Colocando 120 objetos em linha de modo que na 1ª linha haja 1 objeto, na 2ª linha 2 objetos e assim por diante. Qual o total de linhas? R. PA $(1, 2, 3, \ldots)$

$S_n = 120$, $\quad a_n = a_1 + (n-1)r$, $\quad a_n = 1 + (n-1)1$

$a_n = \cancel{1} + n - \cancel{1}$, $\quad a_n = n$, $\quad a_1 = 1$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, \quad 120 = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}$$

$240 = n^2 + n$, $\quad n^2 + n - 240 = 0$

$a = 1,\ b = 1,\ c = -240$

$\Delta = 1^2 - 4.1.(-240),\ \Delta = 1 + 960,\ \Delta = 961$

$n' = \frac{-1+31}{2},\ n' = \frac{30}{2} = 15,\ n'' = \frac{-1-31}{2} = -16$

15 linhas.

35) (FE-CE) Na PA cujo termo geral é $a_n = 3n + 5$, calcule a soma dos primeiros 12 termos. R. $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$

$a_1 = 3.1 + 5 = 8,\ a_{12} = 3.12 + 5 = 41$

$S_{12} = \frac{(8+41).12}{2} = 294$

36) (UF-RS) O termo médio de uma PA de 5 termos é 5. Calcule a soma dos termos dessa PA. R. Em uma PA (a, b, c), $b = \frac{a+c}{2}$, ou (a, b, c, d, e), $c = \frac{a+e}{2}$ ou seja: o termo médio é igual à média aritmética dos extremos.

$(a_1, a_2, 5, a_4, a_5),\ 5 = \frac{a_1 + a_5}{2},\ a_1 + a_5 = 10$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2},\ S_5 = \frac{(a_1 + a_5)5}{2}$

$S_5 = \frac{10.5}{2} = \frac{50}{2} = 25$

(37) (UF-MG) Calcule o número de multiplos de 8 existentes entre 102 e 9002. (17)

R. $102 \,\underline{|\,8}$ $\quad 12$

-8
22
-16
$6 \rightarrow$ faltam 2 para 8, logo: $a_1 = 102 + 2 = 104$

$9002 \,\underline{|\,8}$ $\quad 1125$

-8
10
-8
20
-16
42
40
2 subtraímos de 9002

$9002 - 2$
$a_n = 9000$

PA $(104 \ldots 9000)$, $r = 8$. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$9000 = 104 + (n-1) \cdot 8$, $9000 = 104 + 8n - 8$

$8n = 8904$, $n = \frac{8904}{8} = 1.113$ ✓

(38) Qual o 10° termo da PG $(20, 10, 5 \ldots)$?

R. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $q = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $a_{10} = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9$

$a_{10} = 20 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{20}{512} = \frac{5}{128}$ ✓

(39) Se o 9º termo de uma PG é $\frac{\sqrt{2}}{8}$ e a sua razão é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, calcule o 1º termo.

R. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $\frac{\sqrt{2}}{8} = a_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$, $\frac{\cancel{\sqrt{2}}^{1}}{8} = a_1 \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}^7}{2^8}$

$a_1 = \frac{2^8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^6}{\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2}^6}$, $a_1 = \frac{256 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}\, 64}$,

$a_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

OU

$\frac{\sqrt{2}}{8} = a_1 \cdot \frac{2^4}{2^8} \Rightarrow \frac{a_1 16}{256} = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $\frac{a_1}{\cancel{16}_{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{8}_{1}}$, $a_1 = 2\sqrt{2}$

(40) Numa pequena cidade um boato se espalha da seguinte maneira: no 1º dia 5 pessoas ficam sabendo; no 2º 15, no 3º 45 e assim por diante. Quantas pessoas ficam sabendo no 10º dia? R.

$(5, 15, 45\ldots)$, $\frac{15}{5} = 3$, $\frac{45}{15} = 3$. é uma PG.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_{10} = 5 \cdot 3^9 = 98.415$.

(41) Quantos termos tem a PG $(2, 6, 18, \ldots 4374)$?

R. $q = \frac{6}{2} = 3$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $4374 = 2 \cdot 3^{n-1}$

$3^{n-1} = \frac{4374}{2}$, $3^{n-1} = 2.187$, ~~$3^{n-1} = 3^7$~~

$n - 1 = 7$, $n = 7 + 1$, $n = 8$.

2187	3
729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

(42) Interpole 5 meios geométricos entre $\sqrt{3}$ e $8\sqrt{3}$. R. Esta PG tem 7 termos

$(\sqrt{3} \_ \_ \_ \_ \_ 8\sqrt{3})$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $8\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot q^6$

$q^6 = 8$, $(q^2)^3 = 2^3$, $q^2 = 2$, $q = \pm\sqrt{2}$

PG $(\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, 4\sqrt{6}, 8\sqrt{3})$ ✓

(43) Determine x de modo que a sequência $(x-3, x+1, 6x+1)$ seja uma PG. R

$\frac{x+1}{x-3} = \frac{6x+1}{x+1}$, $(6x+1)(x-3) = (x+1)^2$.

$6x^2 - 18x + x - 3 = x^2 + 2x + 1$, $5x^2 - 19x - 4 = 0$

$\Delta = (-19)^2 - 4.5.(-4)$, $\Delta = 441$

$x' = \frac{19+21}{10} = \frac{40}{10} = 4$, $x'' = \frac{19-21}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$

PG $(1, 5, 25)$ ou $(-\frac{16}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5})$ –

(43) Determine x de modo que a sequência $(2, \log_3 x, 8)$ seja uma PG. R. $\frac{\log_3 x}{2} = \frac{8}{\log_3 x}$

$\log_3^2 x = 16$, $\log_3 x = \pm 4$

$\log_3 x = 4$, $x = 3^4$, $x = 81$; $\log_3 x = -4$, $x = 3^{-4}$, $x = \frac{1}{81}$

(44) Calcule a soma dos 8 primeiros termos da PG $(320, 160, 80 \ldots)$. R. $q = \frac{160}{320} = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$

$S_8 = \frac{320.[(\frac{1}{2})^8 - 1]}{-\frac{1}{2}} = \frac{320(\frac{1}{256} - 1)}{-\frac{1}{2}} = -640\left(\frac{1-256}{256}\right) = \frac{1.275}{2}$ –

(45) Um indivíduo contraiu uma dívida e precisou pagá-la em 8 prestações assim determinadas: 1ª R$ 60, 2ª R$ 90, 3ª R$ 135, e assim por diante. Qual o valor total da dívida? R. $(60, 90, 135 \ldots)$ é uma PG.

$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q-1}$, $S_8 = \frac{60\left[\left(\frac{3}{2}\right)^8 - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{60.[\frac{6561}{256} - 1]}{\frac{1}{2}}$

$= 120\left[\frac{6561-256}{256}\right] = \frac{756.600}{256} = \frac{94575}{32} \simeq 2.956$ ✓

(46) Calcule $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$. R Esta PG tem infinitos termos e converge para um valor. $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, $S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$, $S_\infty = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$ –

(47) Resolva a equação: $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} \dots = 1$

R. $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, $1 = \frac{x}{1-\frac{x}{2}}$, $q = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{1}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

$= \frac{x}{\frac{2-x^2}{2}} = \frac{1}{1}$, $\frac{x}{1} = \frac{2-x^2}{2}$, $2x = 2 - x^2$

$x^2 + 2x - 2 = 0$, $\Delta = 4 - 4.1.(-2) = 12$

$x' = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(-1+\sqrt{3})}{2} = \sqrt{3} - 1$

(48) determine a fração geratriz de 0,888...

R. a PG representativa da dízima é

$(\frac{8}{10}, \frac{8}{100}, \frac{8}{1000}, \dots)$, $q = \frac{\frac{8}{100}}{\frac{8}{10}} = \frac{8}{100} \cdot \frac{10}{8} = \frac{1}{10}$

$S_\infty = \frac{\frac{8}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$

(49) determine a fração geratriz de 5,676767...

R. O 5 não faz parte da dízima.

$5 + \left(\frac{67}{100}, \frac{67}{10.000} \dots\right)$, $q = \frac{\frac{67}{10.000}}{\frac{67}{100}} = \frac{67}{10.000} \cdot \frac{100}{67} = \frac{1}{100}$

$S_\infty = \frac{\frac{67}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{67}{100}}{\frac{100-1}{100}} = \frac{67}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{67}{99}$

fração geratriz $= \frac{5}{1} + \frac{67}{99} = \frac{562}{99}$

(50) (UF-CE) Calcule o 9º termo de uma PG em que $a_1 = 1$ e $a_7 = 8$. R. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$8 = 1 \cdot q^6$, $(q^2)^3 = 2^3$, $q^2 = \sqrt{2}$, $a_9 = 1 \cdot \sqrt{2}^8$, $a_9 = 16$

(51) (UF-SE) Em uma PG o 2º termo é −2 e o 5º é 16, calcule a razão. R.

$$\frac{-2 = a_1 \cdot q}{16 = a_1 \cdot q^4}, \quad \frac{1}{q^3} = -\frac{1}{8}, \quad \frac{1}{q} = -\frac{1}{2}, \quad q = -2$$

(52) (UF-RS) A sequência (a, b, c) é uma PG, crescente e a.b.c = 64, calcule b. R.

Em toda PG o termo médio ao quadrado é igual ao produto dos extremos. $b^2 = a.c$

$abc = 64$, $b.ac = 64$, $b.b^2 = 64$, $b^3 = 64$, $b = 4$, $b = 4$

(53) Calcule o limite da soma da PG (8, 4, 2 ...). R. $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, $q = \frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$$

(54) Resolva a equação: $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} \ldots = 16$

R. $q = \frac{2^{x-1}}{2^x} = \frac{\frac{2^x}{2}}{\frac{2^x}{1}} = \frac{2^x}{2} \cdot \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2}$

$$16 = \frac{2^x}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow 16 = \frac{2^x}{\frac{1}{2}}, \quad 2^x = 8, \quad 2^x = 2^3$$

$$x = 3$$